Lakindu Nethsara.

Date 26th May of 2021

Combined Maths Short Note

-Pure Maths.-

01 - බහු පද ශ්‍රිත -

බෙදීම් ඇල්ගොරිතමය,

භාජ්‍යය = භාජකය x ලබ්ධිය + ශේෂය

ශේෂ ප්‍රමේයය

* $F(x)$ යනු x හි බහු පද ශ්‍රිතය $(x-a)$ න් ඒකජ ශ්‍රිතයෙන් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය $F(a)$ වේ.

$$(x-a)\,\overline{\smash{\big)}\,F(x)}\quad \text{quotient } g(x),\ \text{remainder } R$$

$F(x) = (x-a)\,g(x) + R$

$x = a$ විට

$F(a) = R$ //

සාධක ප්‍රමේයය

*$F(x)$ - යනු x හි බහු පද ශ්‍රිතය $(x-a)$ නම් ඒකජ ශ්‍රිතයෙන් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය ශූන්‍ය නම් $(x-a)$ යනු $F(x)$ හි සාධකයකි.

$$(x-a)\,\overline{\smash{\big)}\,F(x)}\quad \text{quotient } g(x),\ \text{remainder } R$$

$F(x) = (x-a)\,g(x) + R$.

$x = a$ ආදේශයෙන්,

$F(a) = R$

ශේෂය ශූන්‍ය නම් දී එවිට.

$F(x) = (x-a)\,g(x)$.

$(x-a)$ යනු $F(x)$ හි සාධකයකි.

Scanned with CamScanner

* සාධක ප්‍රමාණය වැඩි වන විට ශේෂය ලබා ගන්නා ක්‍රම ත්‍රිත්වයකි.

(1) $F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)h(x) + Ax^2 + Bx + C$ ← සාමාන්‍ය ක්‍රමය

[මෙහිදී සමගාමී සමීකරණ විසඳීමෙන් ලබා ගනී]

(2) $F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)h(x) + A(x-a)(x-b) + B(x-b)(x-c) + C(x-b)(x-c)$ ← සාධක ක්‍රමය

[A, B, C විසඳුම් එකවර ලැබේ]

(3) $F(x) = (x-a)(x-b)(x-c)h(x) + A(x-a)(x-b) + B(x-a) +$ ← සාධක අඩු වන ක්‍රමය

[ශේෂ ප්‍රමේය නැවත නැවත යෙදීමෙන් විසඳිය හැකිය]

<u>මූලික භින්න භාග ආකාර</u>

(01) $$\frac{1}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)}$$

(02) $$\frac{1}{(x-a)(x-b)^2} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{C}{(x-b)^2}$$

(03) $$\frac{1}{(x-a)(x^2+b)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{Bx+C}{(x^2+b)}$$

(04) $$\frac{x^2}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + K$$

(05) $$\frac{x^3}{(x-a)(x-b)} = \frac{A}{(x-a)} + \frac{B}{(x-b)} + Kx + D$$

02 - වර්ග සමීකරණ හා වර්ගජ ශ්‍රිත -

මූල සහ සංගුණක අතර සම්බන්ධතා සොයාගැනීම.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0$$

$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{b^2}{4a} - \frac{c}{a}$$

$$\left[x + \frac{b}{2a}\right]^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

$$\alpha = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{— (1)} \qquad \beta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{— (2)}$$

* මූල තාත්වික වීම තීරණය කරන $b^2 - 4ac$. වේ, α, β මූල 2 තුළම අඩංගු වන බැවින් එක්කෝ මූල 2ම තාත්වික විය යුතුය. නැතහොත් මූල දෙකම අතාත්වික විය යුතුය.

* <u>මූල 2 තාත්වික අසමාන වීමට</u>

  $b^2 - 4ac > 0$ විය යුතුය.

* <u>මූල දෙක තාත්වික හා සමාන වීමට</u>

  $b^2 - 4ac = 0$ විය යුතුය.

* මූල දෙක තාත්වික වීමට නම්
$b^2 - 4ac \geq 0$ විය යුතුය.

* මූල 2 අතාත්වික වීමට
$b^2 - 4ac < 0$ විය යුතුය

* α, β මූල වශයෙන් ඇති සමී.

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$$

වර්ගජ ශ්‍රිත වල ප්‍රස්තාර

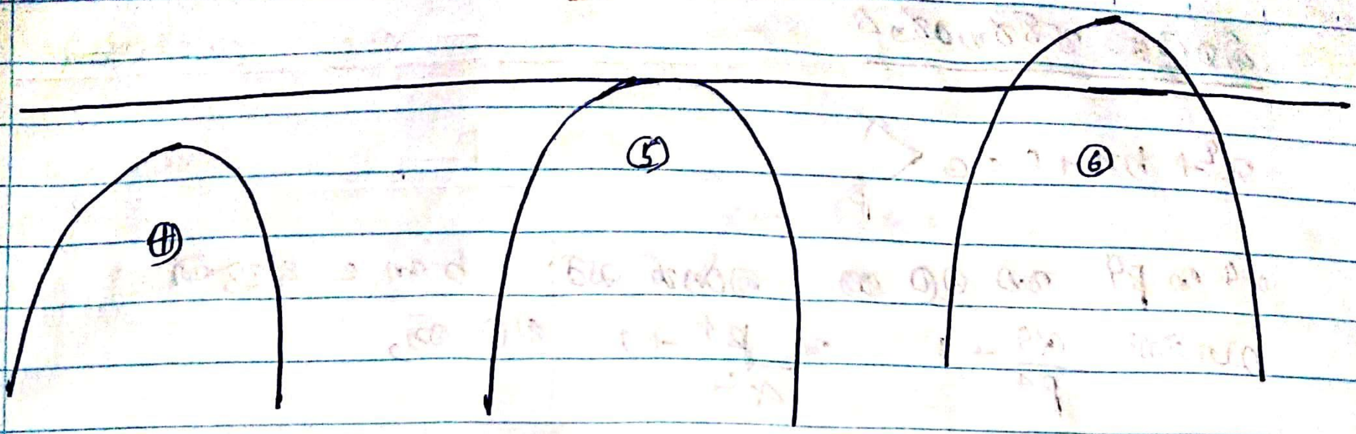
$y = ax^2 + bx + c$ ශ්‍රිතයේ ප්‍රස්තාරය ලබා ගන්නා විට

1. වර්ග පූර්ණයෙන් හැරුම් ලක්ෂ්‍යය සෙවීම
2. $x = 0$ දී y ලබා ගැනීම.
3. $x \longrightarrow \pm\infty$ දී y ලබා ගැනීම.

මෙම පියවර 3 අනුගමනය කළ යුතුය.
$a > 0$ නම් අවමයක් ද
$a < 0$ නම් උපරිමයක් ද වේ.

වර්ග ශ්‍රිතයක ප්‍රස්තාර අවස්ථා

Scanned with CamScanner



$a<0$	$a<0$	$a<0$
$b^2-4ac<0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac>0$

වර්ගජ සමීකරණ විසඳීම

* $a\sin x + b\cos x = c$ ආකාරයේ සමීකරණ
  $a^2+b^2 \geq c^2$ විය යුතුය.

පොදු මූල සම්බන්ධ ගැටලු

* $ax^2+bx+c=0$ හා $px^2+qx+r=0$ යන සමීකරණ දෙකෙහි මූල පොදු නම්,

$$\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$$

* $ax^2+bx+c=0$ හා $px^2+qx+r=0$ යන සමී. දෙකෙහි එක් මූලයක් පොදු වේ නම්,
පොදු මූලය α යැයි ගනිමු.

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \text{--- (1)}$$
$$p\alpha^2+q\alpha+r=0 \quad \text{--- (2)}$$

(1) $\times p$ − (2) $\times a$

$$pb\alpha+pc-aq\alpha-ar=0$$
$$\alpha(pb-aq)=ar-pc$$
$$\alpha=\frac{ar-pc}{pb-aq}$$

විචල්‍ය පරිවර්තනය

$x^2 + bx + c = 0 \quad \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix}$

α^4 හා β^4 මූල ලෙස වර්ගජ සමී: b හා c ඇසුරෙන් ලබාගන්න $\frac{\alpha^4}{\beta^4} + 1$ හා $\frac{\beta^4}{\alpha^4} + 1$ මූල ලෙස,

$\alpha + \beta = -b \qquad \alpha\beta = c$

$\alpha^4 + \beta^4 = b^4 - 4b^2c + 2c^2 \qquad (\alpha\beta)^4 = c^4$

$$x^2 - (b^4 + 2c^2 - 4b^2c)x + c^4 = 0 \text{ — (1)}$$

$x = \alpha^4$ හෝ $x = \beta^4$

$y = \frac{\alpha^4}{\beta^4} + 1 \qquad y = \frac{\beta^4}{\alpha^4} + 1$

$y = \frac{\alpha^4 + \beta^4}{\beta^4} \qquad y = \frac{\beta^4 + \alpha^4}{\alpha^4}$

$y = \frac{b^4 + 2c^2 - 4b^2c}{x} \qquad y = \frac{b^4 + 2c^2 - 4b^2c}{x}$

$$x = \frac{b^4 + 2c^2 - 4b^2c}{y}$$

$$c^4y^2 - (b^2 + 2c^2 - 4b^2c)y + (b^4 + 2c^2 - 4b^2c)^2 = 0$$

(01)

(02)

(03)

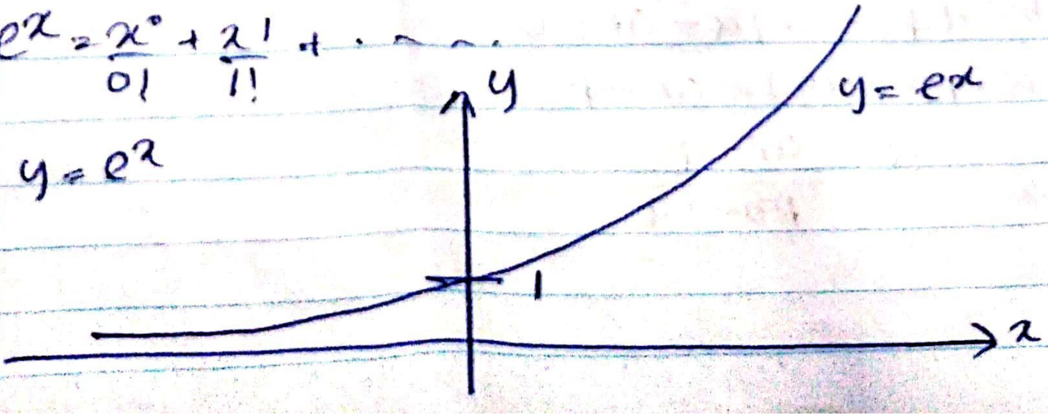
(04)

(05)

දර්ශක හා ලඝුගණක

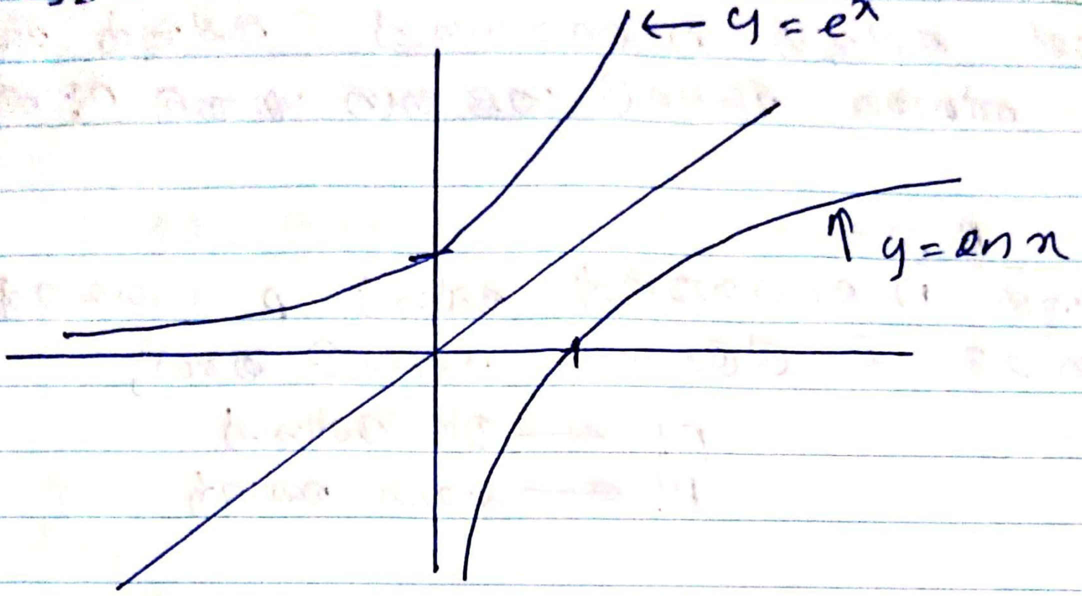
$e^x = \frac{x^0}{0!} + \frac{x^1}{1!} + \cdots$

$* \; y = e^x$



ලඝුගණක ශ්‍රිත.

$y = \log_e x.$ $\qquad$ $y = \ln x.$



ලඝුගණක නීති.

(01) $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

(02) $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

(03) $\log_a M^k = k \log_a M$

(04) $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

(05) $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

[02] - සංකරණ හා සංයෝජන -

ප්‍රමේයය I

* වෙනස් වස්තූන් n සංඛ්‍යාවක් වස්තූන් සියල්ලම ගෙන පේළියට කළ හැකි ආකාර $n!$ වේ.

ප්‍රමේයය II

* වස්තූන් n සංඛ්‍යාවකින් වස්තූන් p සංඛ්‍යාවක් සමාන නම් සියල්ලම ගෙන පේළියට කිරීම,

$$\frac{n!}{p!}$$

$n!$ ← මුළු වස්තූන්

$p!$ ← සමාන වස්තූන්

ප්‍රමේයය III

* වෙනත් වස්තූන් n සංඛ්‍යාවකින් වස්තූන් r සංඛ්‍යාවක් තෝරා පේළියට කළ හැකි වෙනස් ආකාර ${}^nP_r$ වේ.

$${}^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ප්‍රමේයය IV

* වෙනස් වස්තූන් n සංඛ්‍යාවකින් n සංඛ්‍යාවක් පුනරාවර්තනයට අවස්ථා ඇති විට වස්තූන් r සංඛ්‍යාවක් තෝරා පේළියට කළ හැකි විවිධ ආකාර ගණන n^r වේ.

මුළු ආකාර $= n^n$ වේ.

සංයෝජනය

${}^nP_r$ = වෙනස් වස්තූන් n සංඛ්‍යාවකින් වරකට r සංඛ්‍යාවක් සොයා පේළියට කිරීම.

වෙනස් වස්තූන්ගෙන් r සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගැනීම × තෝරාගත් වස්තූන් r ස්ථානවල පිළියෙල කිරීම = ${}^nP_r$

ප්‍රමේයය V

වෙනස් වස්තූන් n ගෙන r සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගැනීම ${}^nC_r$ වේ

$$ {}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!} $$

04 - ශ්‍රේණි -

සමාන්තර ශ්‍රේණි

$$ U_n = a + (n-1)d $$

* මුල් පද n හි එකතුව S_n නම්,

$$ S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\} $$

$$ S_n = \frac{n}{2}\{a + l\} $$ $l \rightarrow$ අවසාන පදය.

ගුණෝත්තර ශ්‍රේණි

$U_n = ar^{n-1}$ $S_n = \frac{a(1-r^n)}{(1-r)}$

$|r| < 1$ නම්,
$r^2 < 1$ වේ. ගුණෝත්තර ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ.

සම්මත ශ්‍රේණි භාවිතය

(01)

$$\sum_{r=1}^{n} r = \frac{n}{2}(n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{r=1}^{n} r^3 = \left(\frac{n}{2}(n+1)\right)^2$$

* මේ ආකාරයට S_n සොයන විට U_r පදය r^3, r^2, r වලින් ලියා ගත හැකි නම්, ඉහත සම්මත සූත්‍ර භාවිතයෙන් පිළිතුර ලබා ගන්න.

(02) අන්තර ක්‍රමය භාවිතයෙන් U_r පද අන්තර වූ විට S_n සෙවීම

i) $U_r = r+2$.

$f(r) = Ar^2 + Br$

$f(r+1) = A(r+1)^2 + B(r+1)$

සංගු. සං. මගින්,

$A = -\frac{1}{2}$

$B = -\frac{3}{2}$

$f(r) - f(r+1) = U_r$ වන සේ ගනිමු,

$U_r = f(r) - f(r+1)$

$r=1 \quad U_1 = f(1) - f(2)$

$r=2 \quad U_2 = f(2) - f(3)$

— — — — — —

— — — — — —

$r=n-1 \quad U_{n-1} = f(n-1) - f(n)$

$r=n \quad U_n = f(n) - f(n+1)$

$$\sum_{r=1}^{n} = f(1) - f(n+1)$$

1. විශේෂ අන්තර ක්‍රමය මගින් Sn (සාධක සහිත ශ්‍රේණිය) සෙවීම

(i) $U_r = r^2 + 3r + 2.$

$U_r = (r+1)(r+2)$

ඊළඟ සාධකය සහ පළමු සාධකය

$$f(r) = \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{3\times 1}$$

3 ← සාධක ගණන; 1 ← සාධක අන්තර වෙනස.

$$f(r-1) = \frac{(r)(r+1)(r+2)}{3\times 1}$$

(02) U_r භින්නය ලෙසින් විට එකතුව සෙවීම (S_n)

(i) $U_r = \dfrac{1}{(r+1)(r+2)}$ නම් S_n,

$$f(r) = \frac{1}{(r+2)\, 1\times 1}$$

$(r+2)$ අසල 1 ← සාධක ගණන; දෙවන 1 ← සාධක අන්තර වෙනස

$$f(r+1) = \frac{1}{(r+2)\, 1\times 1}$$

$f(r) - f(r+1) = U_r.$

(ii) $U_r = \dfrac{1}{(3r-2)(3r+1)(3r+4)}$

$$f(r) = \frac{1}{(3r+1)(3r+4)\times 2\times 3}$$

2 ← සාධක ගණන; 3 ← සාធක අන්තර වෙනස $(1 \to 4 = 3)$

U_r හරයේ සාධක වලට මෝ නු පසු රොට ගැලපෙන පරිදි <u>හොලොමත නු සාධකයක් ඉවත් කිරීමෙන්</u> $f(r)$ ලබා ගන්නා අතර මෙහිදී සාධක ගණනින් සහ සාධක අන්තර වෙනසින් බෙදීම අවශ්‍යය වේ

* භින්න භාග භාවිතය

Eg: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \ldots S_n$ සොයන්න.

$U_r = \frac{1}{(2r-1)(2r+1)}$ වේ.

$\frac{1}{(2r-1)(2r+1)} = \frac{A}{(2r+1)} + \frac{B}{(2r-1)}$

$U_r = \frac{1}{2(2r-1)} - \frac{1}{2(2r+1)}$. } කෙලින්ම ආදේශයෙන් විධිය ලබාගන්න.

05 - න්‍යාස හා නිර්ණායක -

$A_{m \times n}$: m - පේළි !!! , n - තීරු

(01) පේළි න්‍යාස

$R_{1\times3}$, $P_{1\times2}$

(02) තීරු න්‍යාස

$C_{3\times1}$, $D_{2\times1}$

(03) සමචතුරස්‍ර න්‍යාස

* පේළි හා තීරු ගණන සමාන වන න්‍යාස.

$A_{2\times2}$, $B_{3\times3}$

(04) ශූන්‍යාත්මක න්‍යාස

$O_{2\times3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Scanned with CamScanner

Date: ..../........../..........

(05) විකර්ණ න්‍යාසය.

* ප්‍රධාන විකර්ණය මත නොපිහිටන අවයව සියල්ලම ශුන්‍ය වන ලෙසයි.

$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(06) අදිශ න්‍යාසය

* විකර්ණ න්‍යාසයක සෑම විකර්ණයේ සෑම අවයවයක්ම සමාන නම් අදිශ න්‍යාසයකි.

$A_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $\quad B_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(07) ඒකක න්‍යාසය.

$I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

න්‍යාස වීජගණිත නීති

* න්‍යාස එකතු කිරීමේදී

(i) $A+B = B+A$

(ii) $(A+B)+C = A+(B+C)$

(iii) $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

* න්‍යාස ගුණ කිරීමේදී

(i) $AB \neq BA$

(ii) $(AB)C = A(BC)$

$\lambda(AB) = A(\lambda B) = (\lambda A)B$

(iii) $A(B+C) = AB+AC$

(iv) $AB=0$ වීම, $A=0$ හෝ $B=0$ වීම අනිවාර්ය නොවේ.

Scanned with CamScanner

$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ වේ.

න්‍යාස ගුණ කිරීම

$A_{2\times3} \times B_{3\times1} = AB_{2\times1}$

$A_{3\times1} \times B_{1\times2} = AB_{3\times2}$.

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix}$

$1 \rightarrow ae + bg$ $\quad 3 \rightarrow ce + dg$

$2 \rightarrow af + bh$ $\quad 4 \rightarrow cf + dh$

න්‍යාසයක පෙරළුම

* $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & f & g \end{bmatrix}$ $\quad A^T = A' = \begin{bmatrix} a & e \\ b & f \\ c & g \end{bmatrix}$

සමමිතික න්‍යාස	කුටිල සමමිතික න්‍යාස
$A = A^T$	$A^T = -A$

ප්‍රලම්බ න්‍යාස

A ප්‍රලම්බ න්‍යාසයකි $\longrightarrow$ $AA^T = I$

* නිර්ණායක

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ $\quad$ න්‍යාසයක නිර්ණායකය, $|A|$

Scanned with CamScanner

$|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ වේ.

න්‍යාසයක ප්‍රතිලෝමය

$AA^{-1} = A^{-1}A = I$ වන පරිදි පවතින A^{-1} න්‍යාසය A හි ප්‍රතිලෝමය වේ

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. $A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

$AA^{-1} = I$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$a + 2c = 1$ —— (1) $3a - c = 0$

$b + 2d = 0$ $c = 3a$ —— (3)

$b = -2d$ —— (2) $3b - d = 1$ —— (4)

සමීකරණ 4 විසඳා a, b, c, d සොයා A^{-1} ලබා ගත හැකිය

$|A| = -1 - 6 = -7$ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

කෙටි ක්‍රමය,

i) ප්‍රධාන විකර්ණයේ අවයව 2 මාරු කිරීම.

ii) අනෙක් විකර්ණයේ අවයව දෙක (−) ලකුණෙන් ගුණ කිරීම.

(06) අවකලනය

(01) $y \longrightarrow 0$

(02) $y = x \longrightarrow 1$

(03) $y = x^n \longrightarrow nx^{n-1}$

(04) $\sin x \longrightarrow \cos x$

(05) $\cos x \longrightarrow -\sin x$

(06) $\tan x \longrightarrow \sec^2 x$

(07) $\operatorname{cosec} x \longrightarrow -\cot x \cdot \operatorname{cosec} x.$

(08) $\sec x \longrightarrow \tan x \cdot \sec x.$

(09) $\cot x \longrightarrow -\operatorname{cosec}^2 x.$

(10) $e^x \longrightarrow e^x.$

(11) $\ln x \longrightarrow \frac{1}{x}.$

(11) $\sin^{-1} x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(12) $\cos^{-1} x \longrightarrow \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

(13) $\tan^{-1} x \longrightarrow \frac{1}{1+x^2}.$

Scanned with CamScanner

(01) අවකලනය

↳ අවකලනය භාවිතයෙන් වක්‍ර අනුරේඛනය.

① අනුරේඛනය කිරීමට ඇති $y = f(x)$ හි වක්‍ර ව්‍යුත්පන්නය ලබාගන්න.

$y = f(x)$

$\frac{dy}{dx} = f'(x)$.

② හැරුම් ලක්ෂ්‍ය සෙවීමට x ඛණ්ඩාංක සෙවීම $f'(x) = 0$ කරන්න.

එම x අගයන්ට අනුරූප y අගයන් ලබා ගන්න.

③ සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ

↳ හරය = 0 කරන x අගයන්

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ

↳ $\lim_{x \to \infty} f(x)$ = ස අගය.

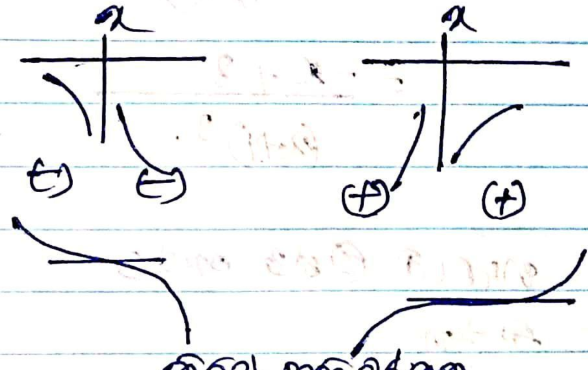
④ හැරුම් වල ස්වභාවය නිර්ණය කිරීම.

$f'(x)$ $f''(x)$ මගින්

$f'(x)$

① උපරිම   ② අවම

③ නතිවර්තන



තිරස් නතිවර්තන

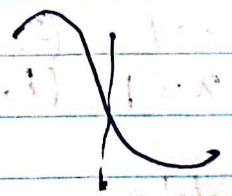
$f''(x)$ හා $f'(x)$.

→ $f'(x)$ → හැරුම x → ස්වභාවය.

→ $f''(x)$ හි ලකුණ දැනගත

↙ ස්වභාවය, සිරස් නතිවර්තන

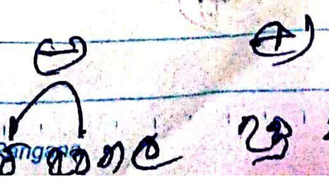
↘ තිරස් නතිවර්තන



$f''(x) = 0$ වට නතිවර්තන ලක්ෂ

$f''(x) > 0 \rightarrow$ අවම

$f''(x) < 0 \rightarrow$ උපරිම



ඍණ කුහල   ධන කුහල

Scanned with CamScanner

↳ අවකලනයේ භාවිත

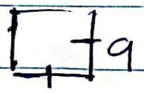
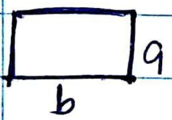
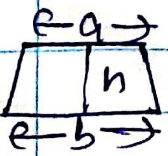
1. ගැටලුවෙහි ලබා දී ඇති හොයන්න රාශීන් හඳුනාගන්න } විචල්‍ය x, y විචල්‍ය r, h

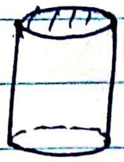
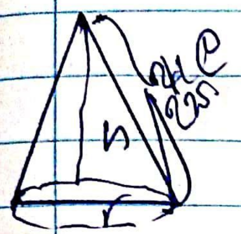
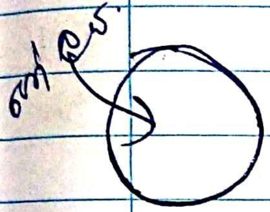
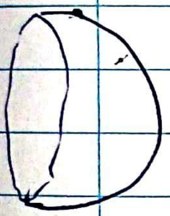
2. එවා අතුරෙන් අපට හොයන්න ඕනෙ රාශිය උපරිම අවම කළ යුතුදැයි හඳුනාගන්න } පරිමාව V, පෘ.ව : A, වර්ගඵලය A

3. එම හොයන්න ඕනෙ රාශිය තනි විචල්‍යයකින් ගොඩනගා ගන්න } උදාහරණයක y ට x ඇසුරින් $V(x)$ x ව ලිවීම

4. එම එක එක විචල්‍ය විශාලත්වය අවකලනය කර ලැබෙන විසඳුම ශූන්‍ය කර උපරිම/අවම සොයන්න. } $\frac{dv}{dx} = 0$

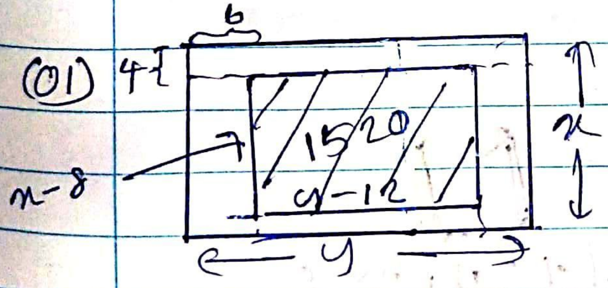
වැදගත් සූත්‍ර

වස්තුව	ව.ඵ	පරිමාව
	a^2	—
	$a \times b$	—
	πr^2	—
	$\frac{1}{2} a h$	—
	$\frac{1}{2}(a+b)h$	—

ඝණය	පෘ.ව	පරිමාව
	$2\pi r^2 + 2\pi rh$	$\pi r^2 h$
	$\pi r \times$ ඇල උස $\pi r\sqrt{h^2+r^2}$	$\frac{1}{3}\pi r^2 h$
	$4\pi r^2$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
	මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $\pi r^2 + 2\pi r^2$ වක්‍ර → $2\pi r^2 + \pi r^3$ වක්‍ර තල	$\frac{2}{3}\pi r^3$

Main tute-05

(01)



$පෘ.ව = xy$

$A = xy$ — ①

දැන්, $1536 = (y-12)(x-8)$

$y - 12 = \frac{1536}{(x-8)}$

$y = \frac{1836}{(x-8)} + 12$

Scanned with CamScanner

ශ්‍රිතයක් තුල ශ්‍රිතයක අවකලනය

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \times \frac{du}{dx} \qquad y = f(u) \quad ලෙස ගනිමු.$$

අවකලන භාවිතය.

* පරාමිතික ශ්‍රිත වල අවකලනය.

$x = f(t)$ හා $y = g(t)$ (x, y) ආකාරයෙන්,

$y = 2x+3$.

$x = t \quad y = 2t+3.$

$(x, y) = (t, 2t+3)$

$x^2+y^2=4$ කේන්ද්‍රය මූලය වන වෘත්තයක.

$x = 2\cos\theta$

$y = 2\sin\theta$

$(x, y) = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$

07 අනුකලනය.

සම්මත සූත්‍ර හා මූලික ආකාර.

(01) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$

(02) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$

(03) $\int (ax+b)^n = \frac{1}{a}\frac{(ax+b)^{n+1}}{n+1} + c$

Scanned with CamScanner

(04) $\int \frac{1}{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C$

(05) $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot dx = \ln|f(x)| + C$

(06) $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

(07) $\int \cos x \, dx = \sin x + C$

(08) $\int \sec^2 x \cdot dx = \tan x + C$

(09) $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = -\cot x + C$

(10) $\int \sec x \cdot \tan x \cdot dx = \sec x + C$

(11) $\int \operatorname{cosec} x \cdot \cot x \cdot dx = -\operatorname{cosec} x + C$

(12) $\int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

(13) $\int e^x \cdot dx = e^x + C$

(14) $\int e^{ax+b}\, dx = \frac{e^{ax+b}}{a} + C.$

Sp ÷

(15) $\int \cot x \cdot dx = \ln|\sin x| + c$

(16) $\int \sec x \cdot dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$

17) $\int \operatorname{cosec} x \cdot dx = -\ln|\operatorname{cosec} x + \cot x| + c$

(15) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1} x + c$

(16) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + c$

$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ ഫോം

(i) $b^2 - 4ac > 0$

$\int \frac{dx}{(x-\alpha)(x+\beta)} \longrightarrow$ ഭിന്നങ്ങ ഫോം

(ii) $b^2 - 4ac = 0$

$\int \frac{dx}{(x-\alpha)^2} \longrightarrow \frac{(x-\alpha)^{-2+1}}{-2+1}$

(iii) $b^2 - 4ac < 0$

$\int \frac{dx}{(x+\alpha)^2 + \beta} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{\beta}} \tan^{-1} \frac{\alpha + x}{\sqrt{\beta}} + c$

Date: ..../........../..........

Scanned with CamScanner

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx \quad \text{ආකාර}$$

(i) $b^2 - 4ac > 0 \longrightarrow$ භින්න භාග.

(ii) $b^2 - 4ac = 0 \longrightarrow$ භින්න භාග

(iii) $b^2 - 4ac < 0 \longrightarrow px + q = \lambda(2ax+b) + M$

ලවය $= \lambda$ (හරයේ අවකලනය) $+ M$!

$$\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx.$$

$f(x)$ හි ඝාතය $\geq g(x)$ හි ඝාතය

* හරයේ තාත්වික ප්‍රභින්න සාධක ඇත්නම් $\longrightarrow$ භින්න භාග

* හරයේ තාත්වික සාධක නොමැති නම්, $\longrightarrow$ ලවය හරයෙන් බෙදීමෙන්

(16) $$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + c$$

(17) $$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + c$$

(18) $$\int \frac{1}{\sqrt{b^2-(ax)^2}}\,dx = \frac{1}{a}\sin^{-1}\left(\frac{ax}{b}\right)$$

* $$\int f(x) \cdot f'(x) = \frac{(f(x))^{n+1}}{n+1}$$

Scanned with CamScanner

$\int \frac{\text{ශ්‍රිතය}}{\text{වර්ගය}} \cdot dx$ ලවයේ ශ්‍රිතය $= \lambda$ (හරයේ අවකලනය) $+ M$.

(19) $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$; $px+q = \lambda(2ax+b)+M$

(20) $\int \frac{2ax+b}{2\sqrt{ax^2+bx+c}} = \sqrt{ax^2+bx+c} + D$

* අනුකලනය සඳහා සම්මත ආකාර

(01) $\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx.$

* හරය වර්ගපූර්ණ කිරීමෙන් මූලික අනුකලනය ලබා ගැනීම.

(02) $\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c} dx.$

* පළමුව හරයේ අවකලනය ලවය ලෙස සකසා දෙවනුව හරය වර්ග පූර්ණ කිරීම.

(03) $\int \frac{K}{ax^3+bx^2+c} dx.$

* හරයේ මාත්‍රය 2 ට වැඩි සෑම අවස්ථාවකම හරයේ සාධක වලට වෙන් කරන්න.

(04) $\int \frac{K}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx.$

* වර්ගමූලය තුළ ඇති ප්‍රකාශනය වර්ගපූර්ණය මගින් සම්මත අනුකලන වෙත ගැනීම.

(05) $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\ dx.$

* වර්ගපූර්ණය මගින් උචිත ලෙස වලට කොටස් ආදේශය කිරීම.

Eg ÷ (i) $\int \sqrt{(x+p)^2 + q^2} \cdot dx \longrightarrow x+p = q\tan\theta$

(ii) $\int \sqrt{(x+p)^2 - q^2}\, dx \longrightarrow x+p = q\sec\theta$

(iii) $\int \sqrt{q^2 - (x+p)^2}\, dx \longrightarrow x+p = q\sin\theta$

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය

$\int f \times g \cdot dx.$

$I = f \times$ (g අනුකලනය) $- \int$ (g හි අනුකලනය) $\times$ (f හි අවකලනය) dx

I L A T E → මුල් සිට ගත අවකල අනුකලනය කරන්න.

ආදේශ ක්‍රමයෙන් කෙටි විසඳුම.

Sp ÷

* $\int \frac{1}{\sqrt{Ax^2 + Bx + C}}\, dx$.

$Ax^2 + Bx + C \longrightarrow$ විවේචකය (Δx)

- $\Delta = 0 \rightarrow \ln$ ආකාරය
- $\Delta < 0 \rightarrow \tan\theta$ ආදේශය
- $\Delta > 0 \rightarrow \sec\theta$ හෝ $\sin\theta$ ($\sin^{-1}$ ආකාරය)

විශේෂ.

$\int \sqrt{f(x)} \xRightarrow{\text{අව.}} \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$

(06) $\int \cos ax \cdot \sin bx \cdot dx$.

*CD සූත්‍ර යෙදීම.

(07) $\int \cos^{a} x \cdot \sin^{b} x \cdot dx$.

අර්ධ කෝණ සූත්‍ර හා ද්විත්ව කෝණ සූත්‍ර භාවිතය.

ඉරට්ට. $\sin x = t$ ඔත්තේ නම්

$\cos x = \frac{dt}{dx}$. වැඩි බලය,

$$\left\{\begin{array}{ll} *\ 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2} & *\ \sin^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2} \\ *\ 1 + \cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} & *\ \cos^2\theta = \frac{1+\cos 2\theta}{2} \end{array}\right.$$

* ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත හරයේ ලවයේ ඇති විට .

$$\int \frac{A + B\sin\theta + \cos\theta}{P + Q\sin\theta + R\cos\theta} \cdot d\theta \longrightarrow \left\{ \sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}. \right\}$$

(08) $\int \tan^n x \cdot dx$

$\tan x = t$ ආදේශයෙන් භින්න භාගවලට [illegible] විසඳිය හැකිය.

(09). $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$ * හරයේ අවකලනය ලවයේ නිර්මාණය කර විසඳිය හැකිය.

(10) $\int \frac{1}{(x+k)\sqrt{ax^2+bx+c}} dx$.

$x + k = \frac{1}{t}$ ආදේශයෙන් ඉන් පසු වර්ග පූර්ණයෙන්,

Scanned with CamScanner

* නිශ්චිත අනුකලනය

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = \left[f(x)\right]_a^b = f(b) - f(a).$$

* නිශ්චිත අනුකලන සීමා ප්‍රමේය.

$$\int_0^a f(x) \cdot dx = \int_0^a f(a-x) \cdot dx.$$

$$I = \int_0^a f(a-x) \cdot dx.$$

$a - x = t$ $\quad$ $x \to 0 \mid t \to a$

එවිට

$-dx = dt$ $\quad$ $x \to a \mid t \to 0$

$$\therefore I = \int_a^0 f(t) \cdot (-dt)$$

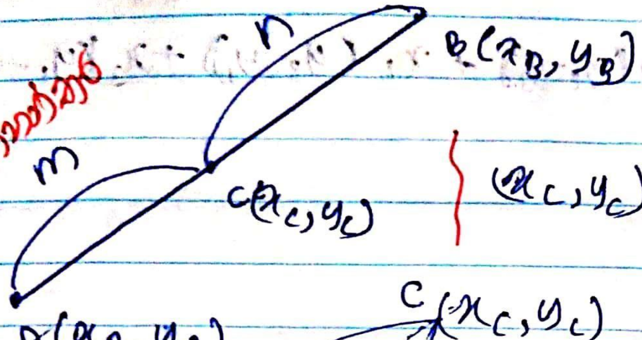
$$\therefore I = -\int_a^0 f(t) \cdot (dt)$$

$$\therefore I = \int_0^a f(x) \cdot dx.$$

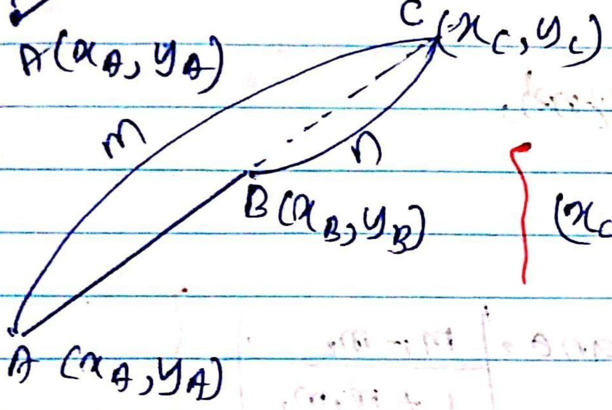
$$\int_0^a f(x) = \int_0^a f(a-x) \cdot dx \quad //$$

08 සරල රේඛාව ඛණ්ඩාංක ජ්‍යාමිතිය II

(01) අභ්‍යන්තරව

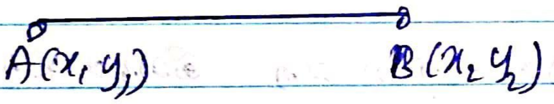


$$(x_C, y_C) = \left[\frac{mx_B + nx_A}{m+n}, \frac{my_B + ny_A}{m+n}\right]$$



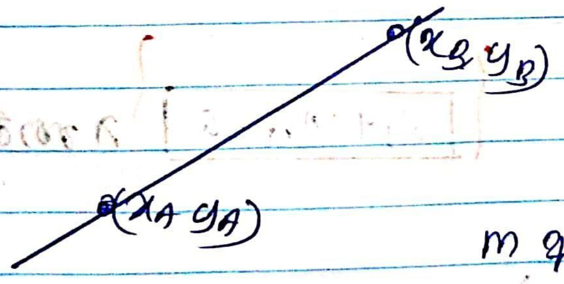
$$(x_C, y_C) = \left[\frac{mx_B - nx_A}{m-n}, \frac{my_B - ny_A}{m-n}\right]$$

(02) ලක්ෂ්‍ය 2ක් අතර දුර



$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

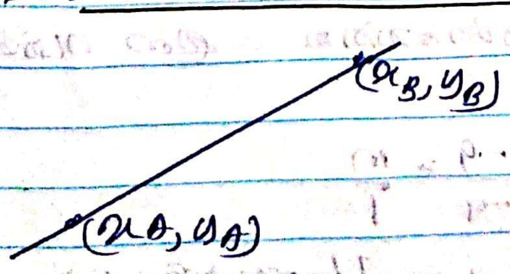
(03) සරල රේඛාවක අනුක්‍රමණය



$$\text{අනු} = \frac{y \text{ වෙනස}}{x \text{ වෙනස}}$$

$$m \text{ අනු} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$

(04) ඛණ්ඩාංක 2ක් ගෙන් සමීකරණය.



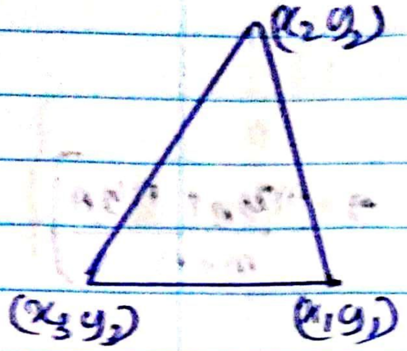
$$\frac{x - x_A}{y - y_A} = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A}$$

* හරස් ගුණකිරීමෙන්,

$y = mx + c$

$ax + by + c = 0$

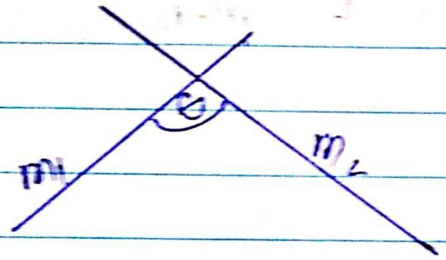
(05) ත්‍රිකෝණයක ව.ඵ.



$$\text{ව.ඵ} = \frac{1}{2}\left| x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) \right|$$

Essay වලට පමණක් අදාළයි,

(06) සරල රේඛා දෙක අතර කෝණය.

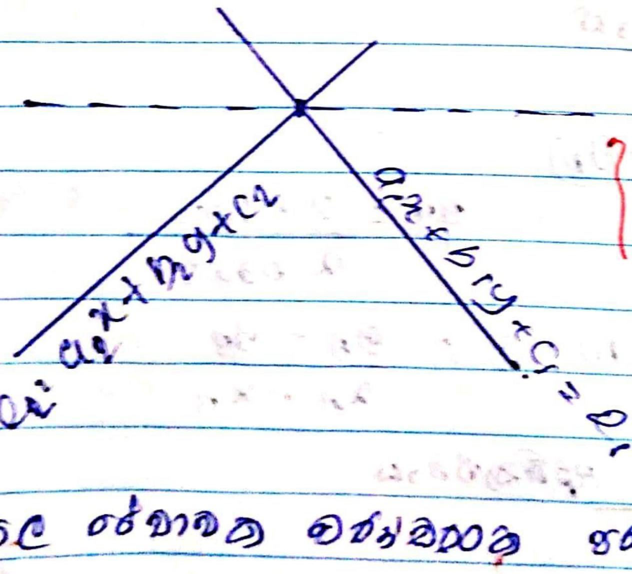


$$\tan\theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right|$$

θ සුළු විට $\tan\theta\ (+)$

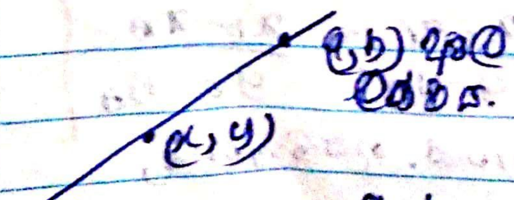
θ මහා විට $\tan\theta\ (-)$

(07) සරල රේඛා දෙක ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යන ඕනෑම සරල රේඛාවක ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හඳුනාගැනීම.



$l_1 + \lambda l_2 = 0$ λ පරාමිතියකි

(08) සරල රේඛාවක පරාමිතික සමීකරණ ලබා ගැනීම.



$$\frac{y - b}{x - a} = \frac{m}{1}$$

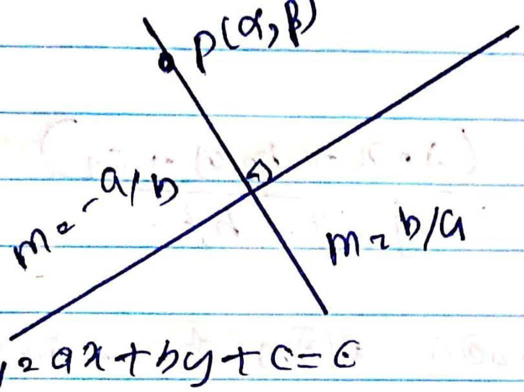
$$\frac{y - b}{m} = \frac{x - a}{1} = t \quad (t \text{ පරාමිතියකි})$$

* සමීකරණය අනුපාත ආකාරයෙන් ලබා ගත හැක.

$$\frac{y-b}{m} = t \qquad \frac{x-a}{1} = t$$

$$\{ y_0 = mt + b \qquad x_0 = t + a \}$$

* $ax+by+c=0$ ට ලම්භකව P හරහා යන රේඛාවේ පරාමිතික ආකාරය.



$$m_1 m_2 = -1$$

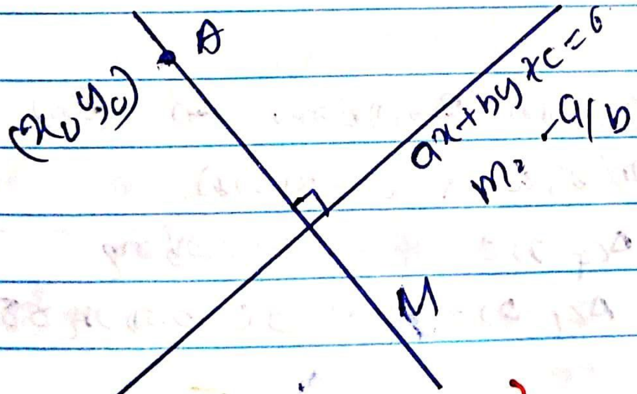
$$\left[\frac{y-\beta}{x-\alpha}\right]\left[\frac{-a}{b}\right] = -1$$

t පරාමිතියක් නම්,

$$\left(\frac{y-\beta}{b}\right) = \left(\frac{x-\alpha}{a}\right) = t.$$

$$\{ y = \beta + bt \text{ සහ } x = \alpha + at \}$$

ලම්භ කල ලඹේ අඩිය සෙවීම.



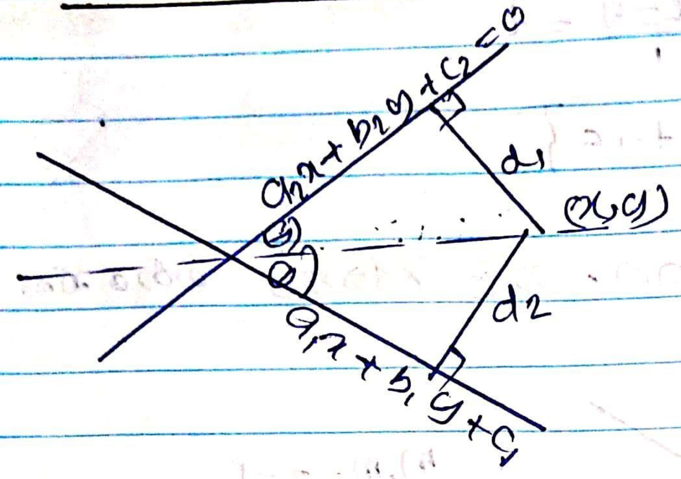
$$mM = -1$$

$$-\frac{a}{b} M = -1$$

$$M = b/a.$$

$$\left\{ \text{ලම්භකයේ සමී} = \frac{y-y_0}{x-x_0} = m \qquad = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{b}{a} \right\}$$

(10) කෝණ සමච්ඡේදක වල සමී: සෙවීම



$$\frac{|a_1x+b_1y+c_1|}{\sqrt{a_1^2+b_1^2}} = \pm\frac{(a_2x+b_2y+c_2)}{\sqrt{a_2^2+b_2^2}}$$

සුළු කෝණ සමච්ඡේදකය සෙවීමට සමීකරණ විසඳා ලැබෙන සමී 2 න් 1 ක් තෝරා ගෙන සුළු කෝණය α ලෙස ගෙන

$$\tan\alpha \left|\frac{m_1+m_2}{1-m_1m_2}\right|$$ මගින් බලන්න

$0 < \theta < \pi/4$ නම් සුළු

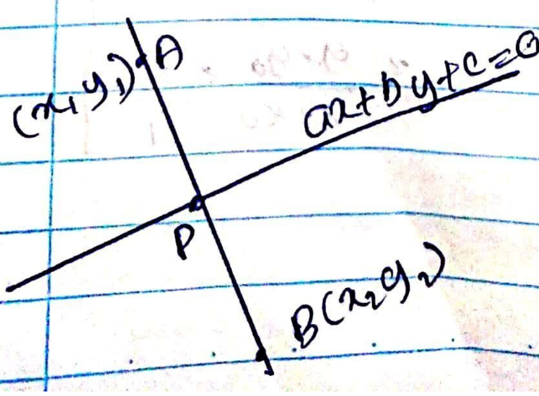
$\theta > \pi/4$ නම් මහා.

කෝණ සමච්ඡේදකය ලෙස ලැබෙන සමීකරණය සහ ලබා දී ඇති l_1 හා l_2 අතර කෝණය α ලෙස ගනිමු

$\alpha > \pi/4$ නම් එය මහා කෝණයේ

$\alpha < \pi/4$ නම් එය සුළු කෝණයේ

(11) රේඛාවක් අනුබද්ධයෙන් ලක්ෂ්‍ය වල පිහිටීම

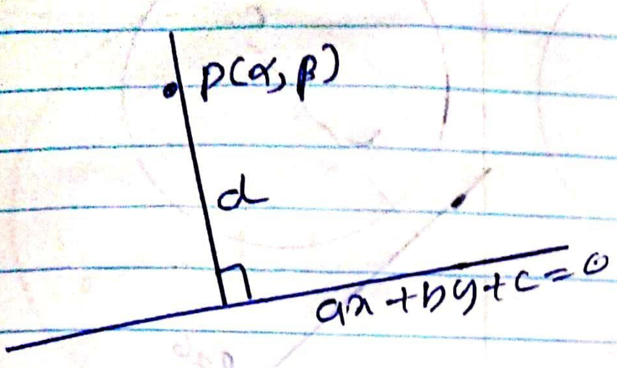


$$P = \left[\frac{kx_2+x_1}{k+1}, \frac{ky_2+y_1}{k+1}\right]$$

$k > 0$ නම් ඇතුළත

$k < 0$ නම් බාහිර

$(a_1x_1+by_1+c)(ax_2+by_2+c)>0$ නම්,



$$d = \left|\frac{a\alpha+\beta b+c}{\sqrt{a^2+b^2}}\right|$$

09 වෘත්තය. කාටීසීය සමීකරණය

(01) කේන්ද්‍රය $(-g,-f)$ හා අරය r වන වෘත්තය.

$$\{x^2+y^2+2gx+2fy+c=0\}$$

කේන්ද්‍රය $=(-g,-f)$
අරය $=r$.

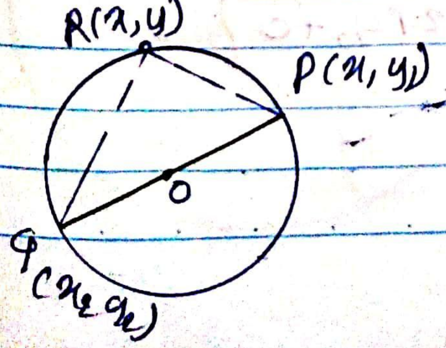
වෘත්තයක් තාත්වික වීම සඳහා

$$g^2+f^2-c>0$$

$$\{g^2+f^2>c\}$$ විය යුතුය.

සරල රේඛාව	වෘත්තය
x^2, y^2 පද නොපවතී.	x^2 හා y^2 සංගුණක සමාන වේ. xy පද නොපවතී.

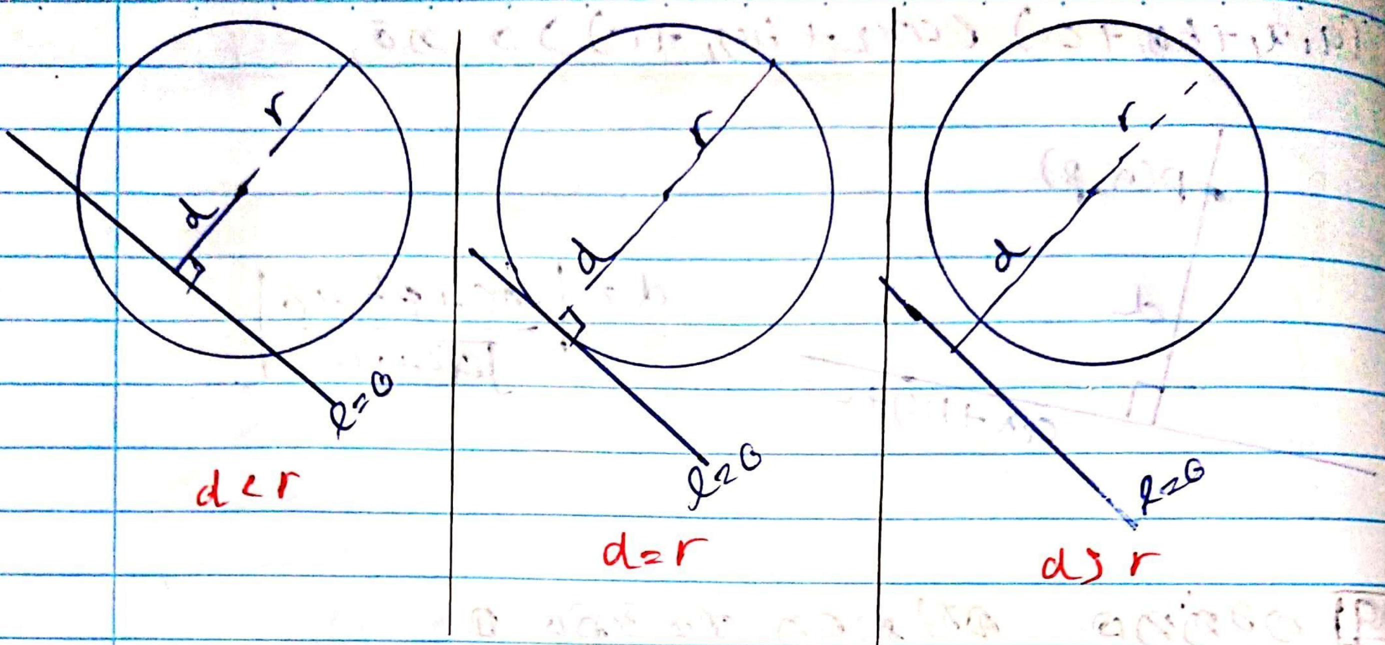
(02) විෂ්කම්භයේ දෙකෙළවර ලක්ෂ්‍යයන් දුන් විට වෘත්තය



$$\left(\frac{y-y_1}{x-x_1}\right)\left(\frac{y-y_2}{x-x_2}\right)=-1$$

$(x \neq x_1, x_2)$

Scanned with CamScanner

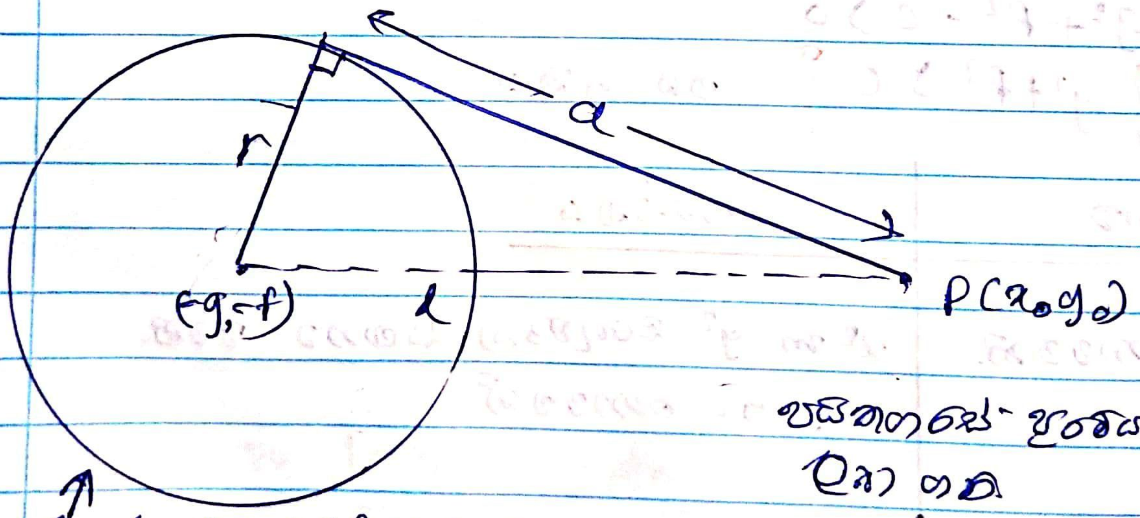


$S \equiv x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ වෘත්තය හා

$l \equiv lx+my+n=0$ සරල රේඛාව ස්පර්ශක වීම සඳහා.

$$(lg+mf-n)^2=(l^2+m^2)(g^2+f^2-c)$$

(03) වෘත්තයකට බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශකයේ දිග.

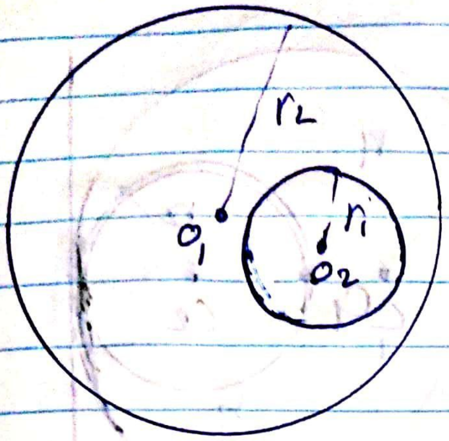


පයිතගරස් ප්‍රමේයය. මගින් ලබා ගත

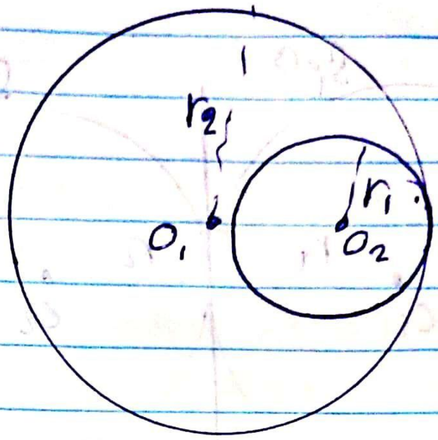
$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$

$$d=\sqrt{x_0^2+y_0^2+2gx_0+2fy_0+c}$$

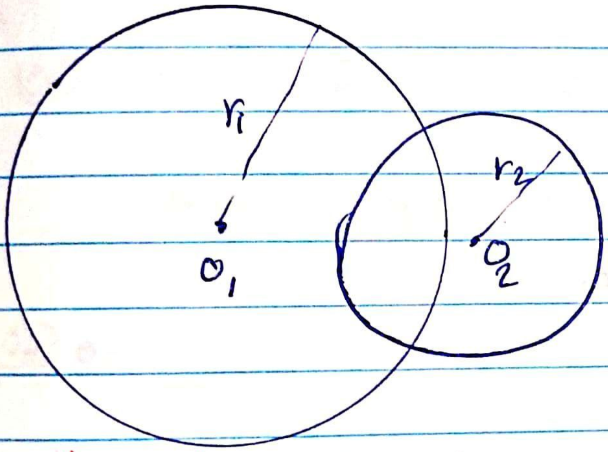
වෘත්තයක් අනුබද්ධයෙන් තවත් වෘත්තයක පිහිටීම.



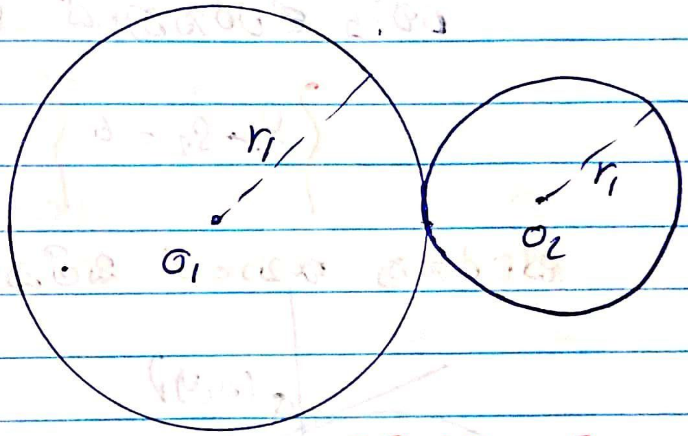
$O_1O_2 < |r_1 - r_2|$ වේ



$O_1O_2 = |r_1 - r_2|$ වේ



$|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$

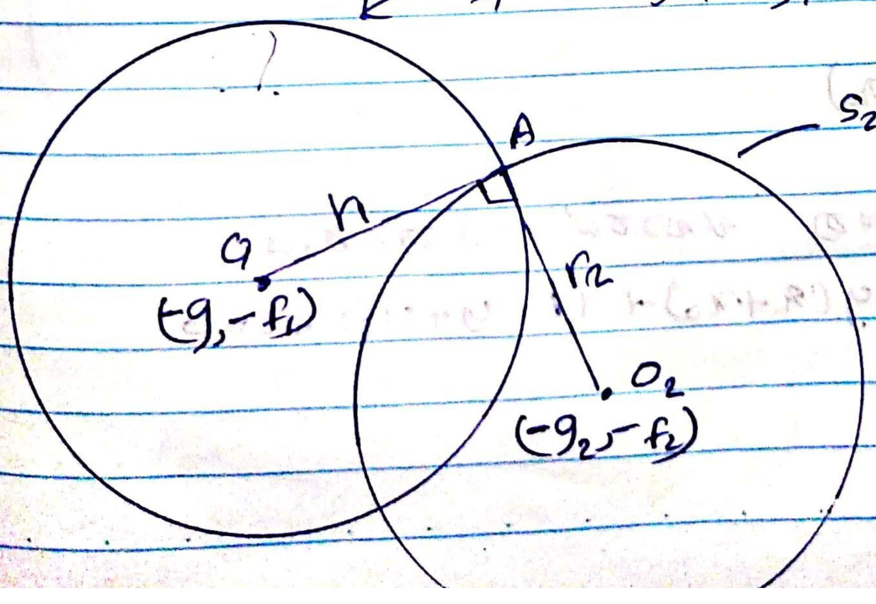


$O_1O_2 = r_1 + r_2$ වේ.

(04) වෘත්ත දෙකක් ප්‍රලම්බව ඡේදනය වීම

$S_1 = x^2 + y^2 + 2g_1x + 2f_1y + c_1 = 0$

$S_2 = x^2 + y^2 + 2g_2x + 2f_2y + c_2$

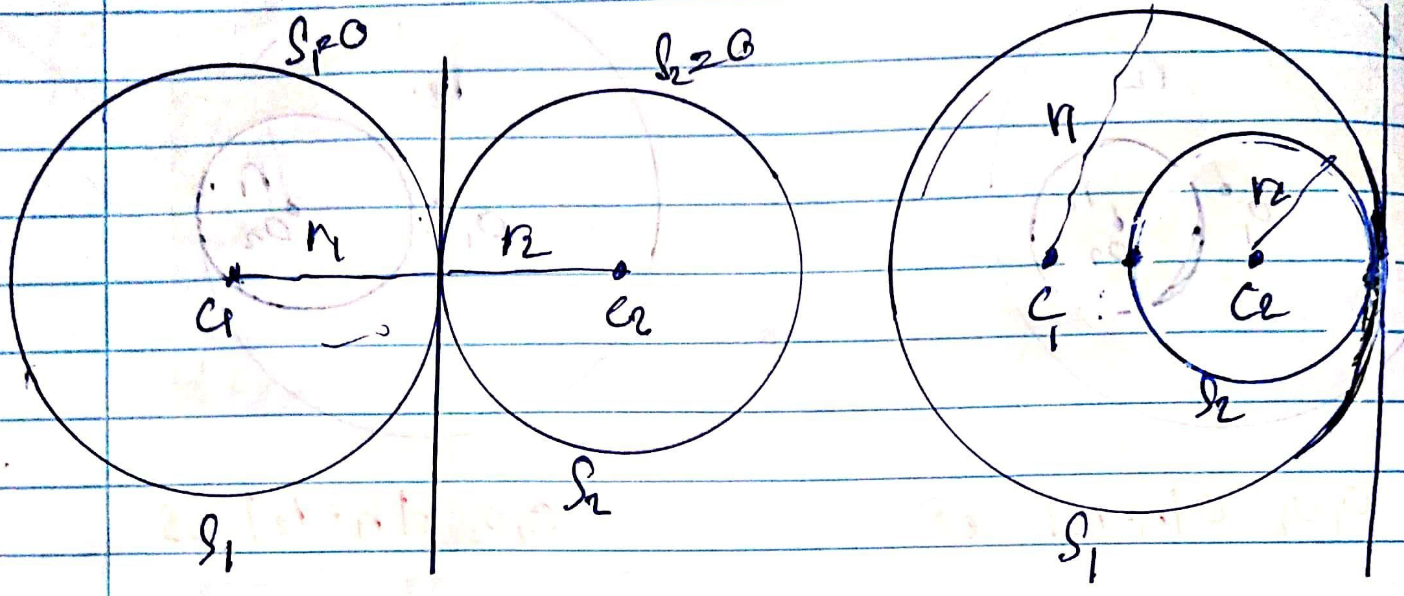


අවශ්‍යතාවය,

$$2g_1g_2 + 2f_1f_2 = c_1 + c_2$$

Scanned with CamScanner

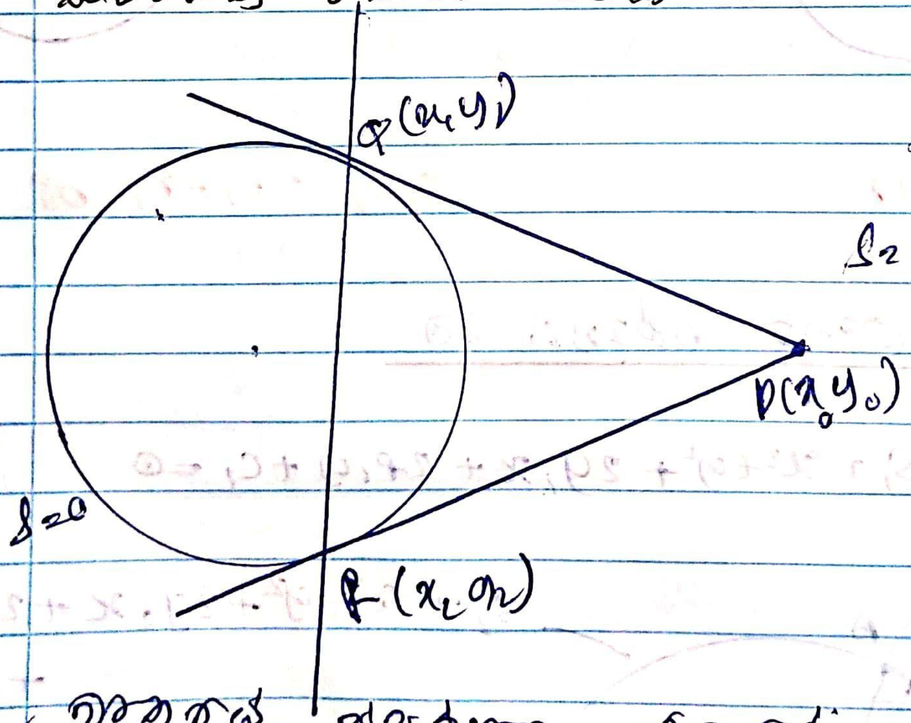
වෘත්ත දෙක ස්පර්ශයන්ගේ ආකාර.



පොදු ස්පර්ශකයේ සමී

$$S_1 - S_2 = 0$$

ස්පර්ශක ජ්‍යායේ සමීකරණය.



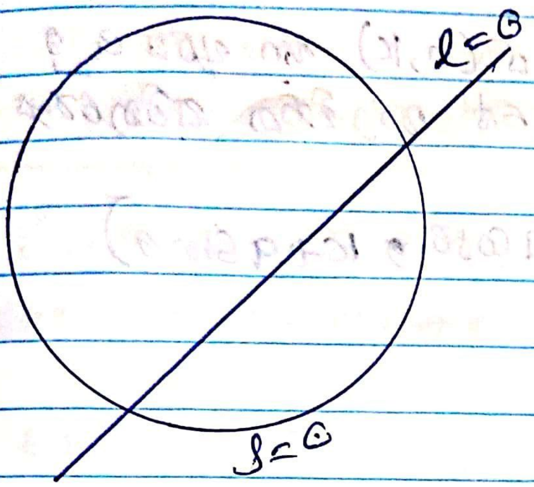
(x_0, y_0) අනුබද්ධයෙන්

$S = x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$

වෘත්තයේ ස්පර්ශක ජ්‍යායේ සමීකරණය

$$xx_0 + yy_0 + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$$

(05) $S=0$ වෘත්තය හා $l=0$ රේඛාව ඡේදනය කරන වෘත්ත $S+\lambda u=0$ නිරූපණය



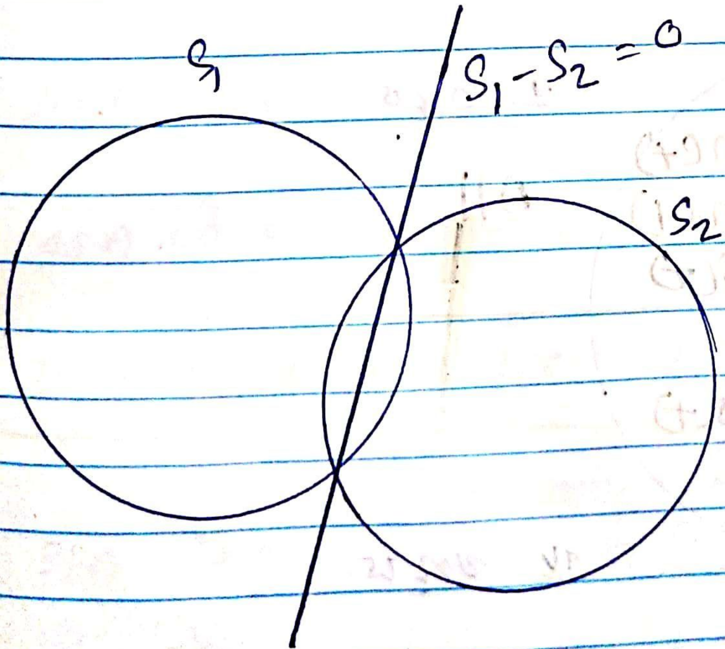
$S+\lambda l=0$ (λ පරාමිතියකි)

* එනම් $S+\lambda u=0$ මගින් වෘත්තය සහ රේඛාව ඡේදන ලක්ෂ්‍ය හරහා ගමන් කරන සියලුම වෘත්තයක් නිරූපණය කරයි. (01)

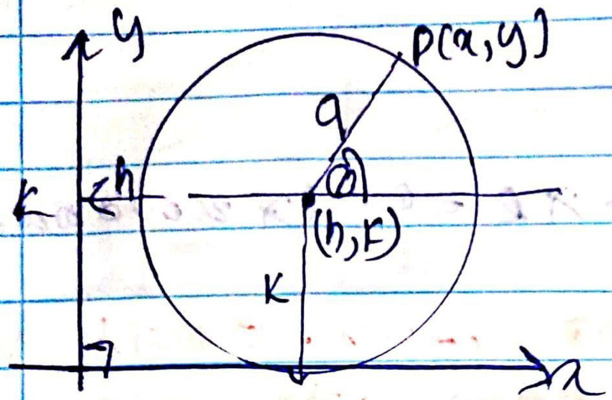
(06) $S_1=0$ හා $S_2=0$ වෘත්තය ඡේදනය වන

ඉහත ආකාරයෙන්ම $S_1+\lambda S_2=0$.

(07) පොදු ජ්‍යාය සමීකරණය.



08) වෘත්තයක පරාමිතික සමීකරණය



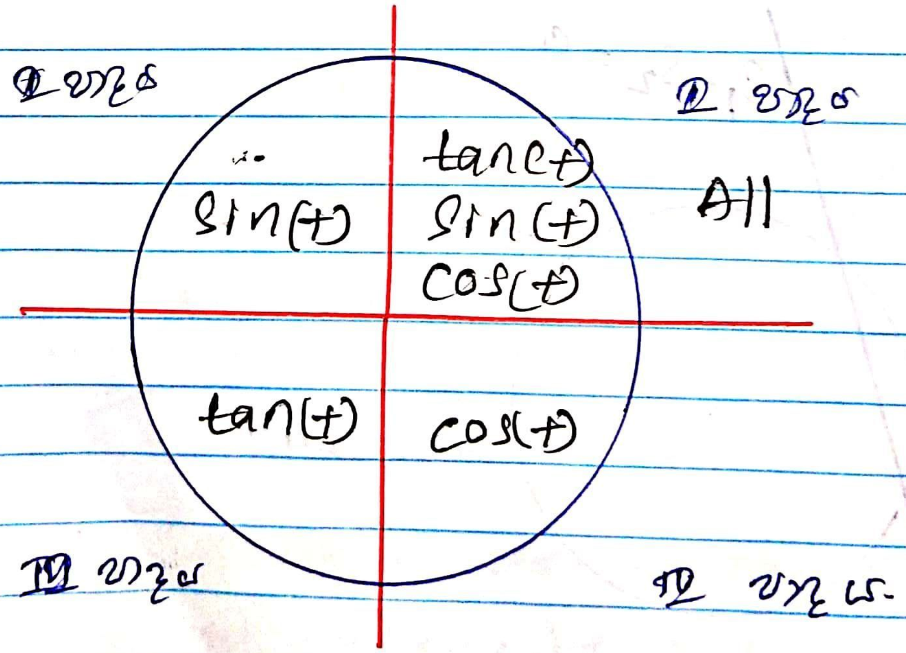
කේන්ද්‍රය (h, k) හා අරය a වූ වෘත්තයේ පරාමිතික සමීකරණය

$(h + a\cos\theta \, , \, k + a\sin\theta)$

10 ත්‍රිකෝණමිතිය ←

	0	30	45	60	90
$\sin\theta$	0	$1/2$	$1/\sqrt{2}$	$\sqrt{3}/2$	1
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0
$\tan\theta$	0	$1/\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

පළමු වෘත්ත පාදයේ සහ අනෙකුත් වෘත්ත පාදයන්හි ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත වල සම්බන්ධතා



SP → $\sin\pi = 0$ $\cos\pi = -1$

$\sin\frac{3\pi}{2} = -1$ $\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$

ත්‍රිකෝණමිතික සමීකරණ.

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta$$

} අනුකලනයේදී ප්‍රායෝගිව යෙදීම වල වැදගත් වේ.

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \cos A \sin B$$
$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$= 1 - 2\sin^2\theta$$
$$= 2\cos^2\theta - 1$$

Sp.

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$$

අනුකලන යෙදීම් කොටස් වශයෙන් අනුකලනය.

$$\sin A \cos B = \frac{1}{2}\left[\sin(A+B) + \sin(A-B)\right]$$

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{1}{2}\left[\cos(A+B) + \cos(A-B)\right]$$

$$\sin A \cdot \sin B = \frac{1}{2}\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]$$

$$\sin C + \sin D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\sin C - \sin D = 2\cos\left[\frac{C+D}{2}\right]\sin\left[\frac{C-D}{2}\right]$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{C+D}{2}\right)\cos\left(\frac{C-D}{2}\right)$$

$$\cos C - \cos D = 2\sin\left(\frac{C+D}{2}\right)\sin\left(\frac{D-C}{2}\right) *$$

Scanned with CamScanner

A, B, C Δ හි කෝණ නම්,

$A + B + C = \pi$

$A + B = \pi - C$

$\sin(A+B) = \sin(\pi - C)$

$\sin(A+B) = \sin C$

එලෙසම

$\cos(A+B) = -\cos C$

$\tan(A+B) = -\tan C$

$A + B + C = \pi$

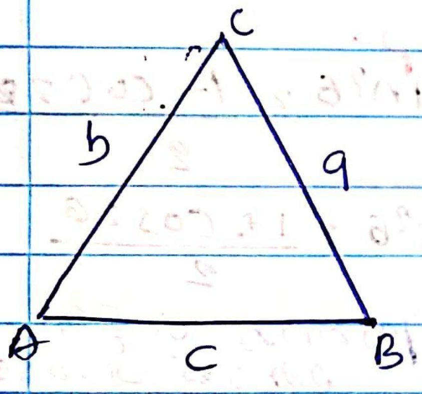
$A + B = \pi - C$

$\frac{A+B}{2} = \frac{\pi - C}{2}$

$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi - C}{2}\right)$

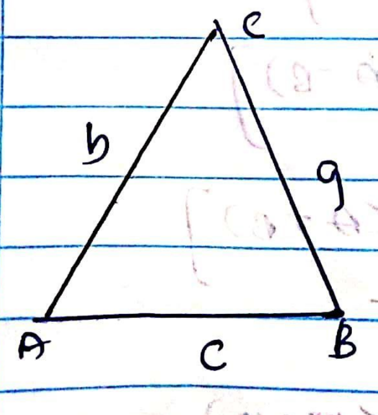
$\sin\left(\frac{A+B}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$

sin සූත්‍රය



$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ වේ.

cos සූත්‍රය



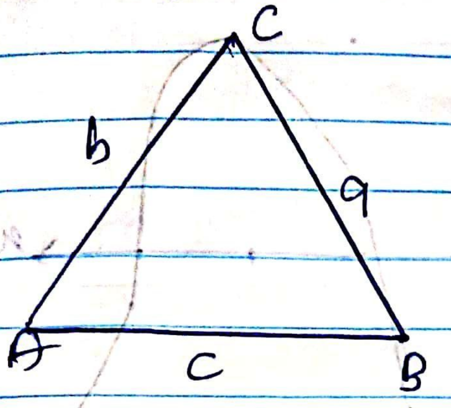
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos C$

Scanned with CamScanner

පොදු විසඳීමට භාවිත කළ හැකි පාද අතර සම්බන්ධය.



$a = b\cos C + c\cos B$

$b = a\cos C + c\cdot\cos A$

$c = a\cos B + b\cos A$

ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිතයන්ගේ සාධාරණ ආකාරය.

From Prasanna maheepala Short Note

$y = a\cos(bx + \alpha) + c.$

$-1 \leq \cos(bx+\alpha) \leq +1$ නිසා

$c - a \leq y \leq a + c$ වේ.

කෝණ පරාසය $-\pi \leq x \leq \pi$

පොදු විසඳුම්

(i) $\sin x = \sin\alpha$ නම්,

$x = n\pi + (-1)^n\alpha$

$\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi/2\right)$ $(n \in \mathbb{Z})$

(ii) $\cos x = \cos\alpha$ නම්

$x = 2n\pi \pm \alpha$ $(n \in \mathbb{Z})$

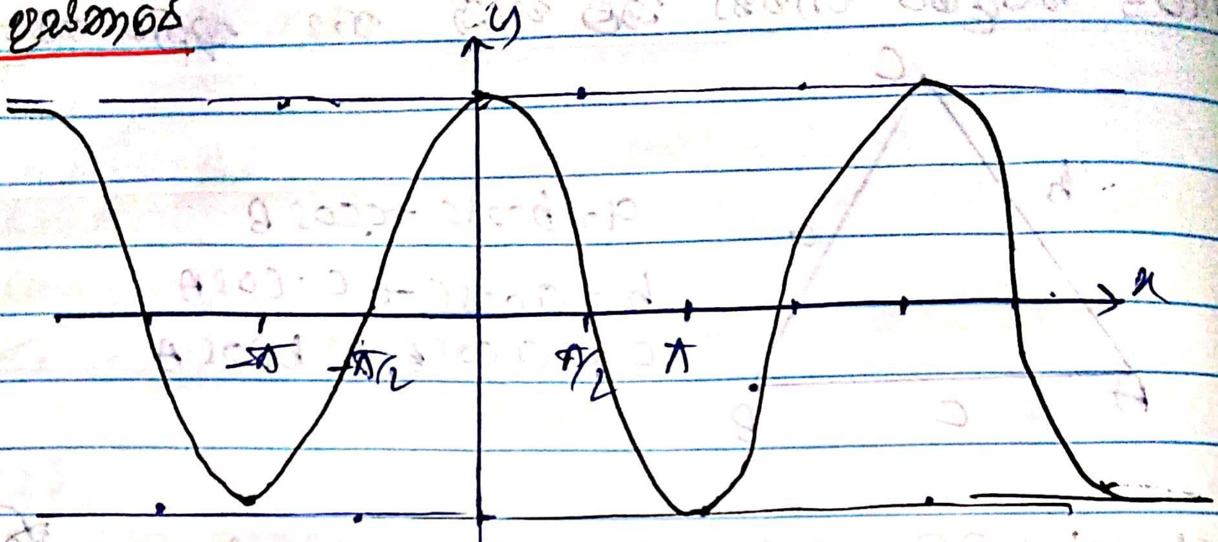
$(0 \leq x \leq 1)$

(iii) $\tan x = \tan\alpha$ නම්

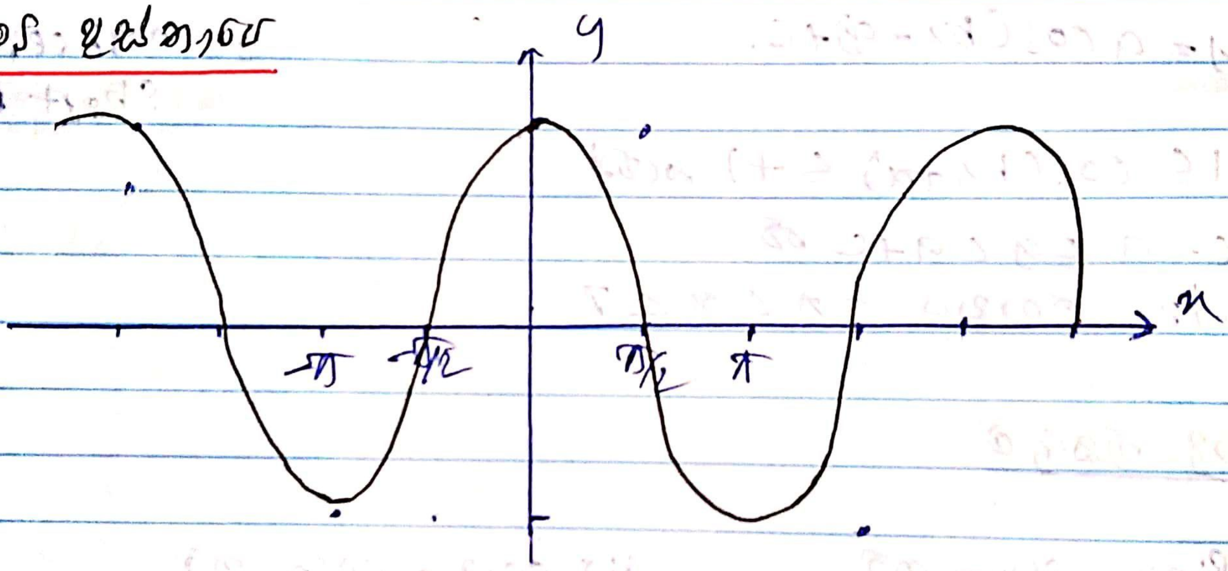
$x = n\pi \pm \alpha$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi/2\right)$

$n \in \mathbb{Z}$

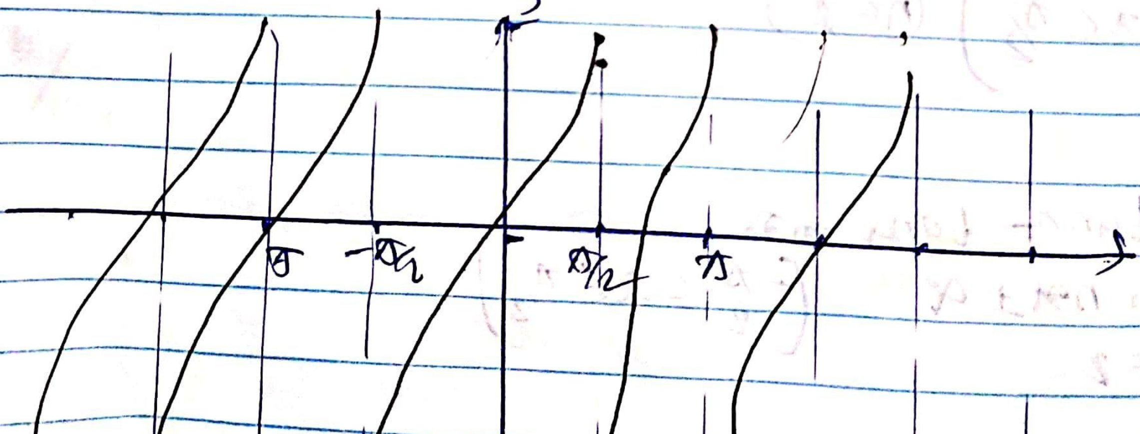
sin ප්‍රස්තාරය



cos ප්‍රස්තාරය



tan ප්‍රස්තාරය



Scanned with CamScanner

ප්‍රතිලෝම ත්‍රිකෝණමිතික ශ්‍රිත

* $y = \sin^{-1}x$

  $-\pi/2 \leq \sin^{-1}x \leq \pi/2$

* $y = \cos^{-1}x$

  $0 \leq \cos^{-1}x \leq \pi$

* $y = \tan^{-1}x$

  $-\pi/2 < \tan^{-1}x < \pi/2$

11 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා

සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් පහත පරිදි ඉදිරිපත් කළ හැකිය.

$z = x + iy$ ආකාරයට සම්මත ආකාරයෙ $i = \sqrt{-1}$ ලෙස ගත x හා y තාත්වික වේ.

$x = Re(z)$

$y = Im(z)$

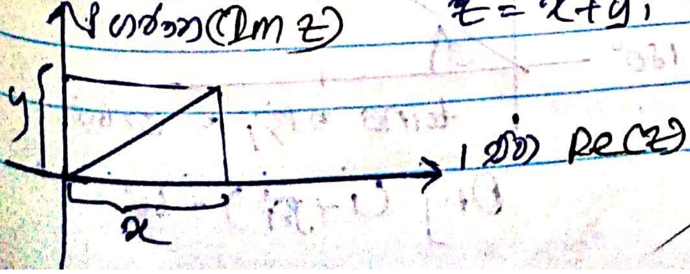
ප්‍රතිබද්ධය $\bar{z} = x - iy$ වේ.

ප්‍රතිබද්ධ සංකීර්ණ සංඛ්‍යා යුගල

සංකීර්ණ සංඛ්‍යා 2ක එකතුවත්, ගුණිතයත් තාත්වික වේ නම් එකක් අනෙකේ ප්‍රතිබද්ධය ලෙස හැඳින්වේ.

ආගන්ඩ සටහන

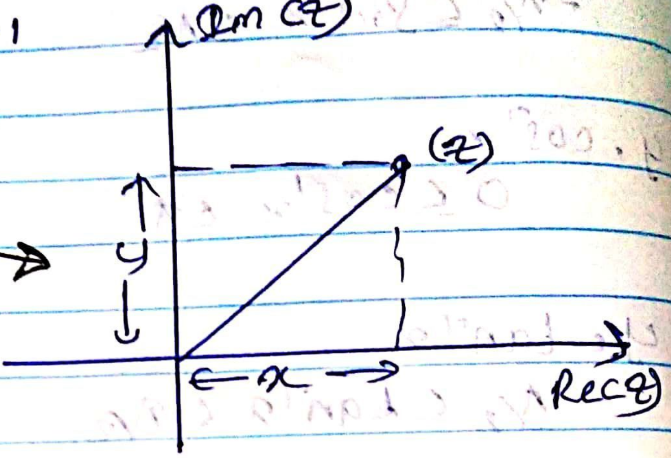
$z = x + yi$



① $\sqrt{-1} = i$

$z = x + yi$

$i^2 = -1$
$i^3 = -i$
$i^4 = +1$



OZ දිග $= |z|$
$= \sqrt{x^2+y^2}$

සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක මාපාංකය හා විස්තාරය

$z = a + ib$
$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

ආගන්ඩ් සටහනේ 0 ලක්ෂ්‍යයේ සිට z දක්වා ඇඳි රේඛාවේ දිග.

විස්තාරය

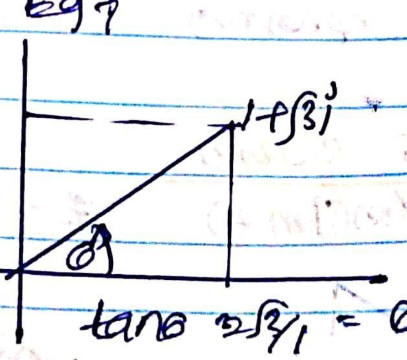
- ප්‍රධාන විස්තාරය Arg(z)
- විස්තාර කුලකය arg(z).

Arg(z)

* ආගන්ඩ් සටහනේ 0 ලක්ෂ්‍යයත් z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවත් යා කරන රේඛාව ධනාත්මක Re(z) අක්ෂය හා වාමාවර්තව සාදන ලෙස ගනු ලබන අතර +180° හා -180° ක් අතර කෝණයකි.

ධන ⟲ / ඍණ ⟳

Eg:-



$\tan\theta = \sqrt{3}/1 \Rightarrow \theta = 60°$

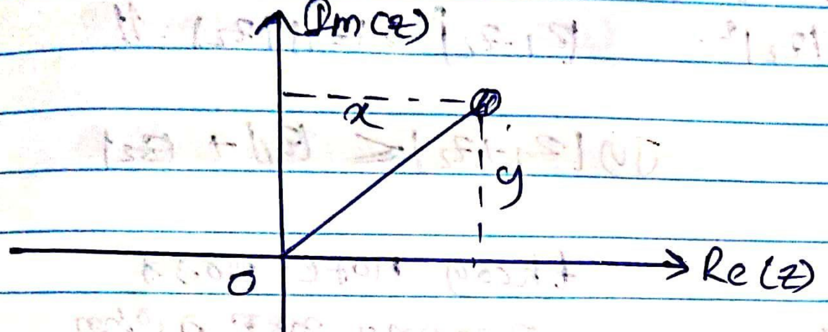
$Arg(1+\sqrt{3}i) = 60°$

Scanned with CamScanner

arg (z).

මක්න්න ප්‍රධාන නොවූ කෝණය (120°, −240°, 360 ...)

ධ්‍රැවක සම්මත ආකාරය.



ධ්‍රැවක සම්මත ආකාරය.

$z = x + iy$

$z = r\cos\theta + i \cdot r\sin\theta$

$z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

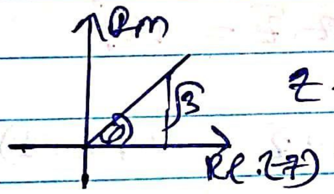
$z = |z|\,[\cos(Arg\,z) + i\sin(Arg\,z)]$

එම සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව = මාපාංකය × (cos (ප්‍රධාන විස්තාරය) + i sin (ප්‍රධාන විස්තාරය))

S	All
t	C

වාමාවර්ත.

Eg: i) $z = 1 + \sqrt{3}i$



$z = |z|\,[\cos\theta + i\sin\theta]$

$= \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2}\,[\cos 60 + i\sin 60]$ //

මාපාංකය සහ ගුණාංග

මේ සාධනයක් මතක තබාගන්න ඕනේ.

(i) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

සාධනය.

$z = x + iy$ නම්,

$\bar{z} = x - iy$

$z \cdot \bar{z} = (x+iy)(x-iy)$

$= (x)^2 - (iy)^2$

$= x^2 - (-1)y^2 = x^2 + y^2$

$\therefore z \cdot \bar{z} = |z|^2$ //

(ii) $|z_1 . z_2|^2 = (z_1 . z_2)(\overline{z_1 z_2})$

$= z_1 z_2 . \bar{z}_1 . \bar{z}_2$

$= (z_1 . \bar{z}_1)(z_2 . \bar{z}_2)$

$= |z_1|^2 . |z_2|^2 .$ $\quad |z_1 . z_2| = |z_1| |z_2|$ //

(iii) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| . \left|\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\right|$

$= \frac{z_1}{z_2} . \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|^2 = \frac{|z_1|^2}{|z_2|^2}$

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$ //

(iv) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$

theory note එකේ මේ සාධනය ඇතුළත් කලේනෑ.

සාරාංශය.

1) $\bar{\bar{z}} = z$

2) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

3) $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$

4) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 . \bar{z}_2$

5) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$

6) $\bar{i} = -i$

7) $\bar{a} = a$, $a \in \mathbb{R}$

8) $z . \bar{z} = |z|^2$

9) $z + \bar{z} = 2Re(z)$

10) $z - \bar{z} = 2i\, Im(z)$

Scanned with CamScanner

විස්තාරය සඳහා ප්‍රමේය.

① $arg(z_1) + arg(z_2) = arg(z_1 . z_2)$

② $arg(z_1) - arg(z_2) = arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$

③ $arg(z^n) = n . arg(z)$

ද මුවාර් ප්‍රමේය.

* $z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

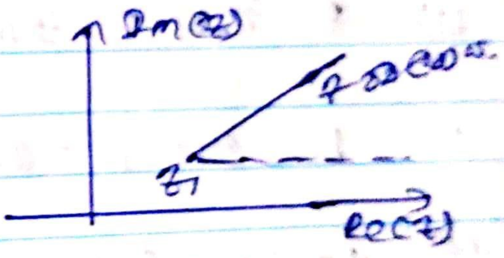
නම්,

$z^n = r^n[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)]$

සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවකි පථයන් නිරූපණය.

① $Arg(z - z_1) = \theta$ — සෑදෙන කෝණයන්

z ↓ චලිත, z_1 ↓ ස්ථිර.



$-180° < \theta \leq 180°$

මාපාංක ගුණ

(i) $|z_1 . z_2| = |z_1| . |z_2|$

(ii) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

(iii) $|i| = 1$

(iv) $|i| = 1$

Date

05) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

06) $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$

07) $\left|\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right| = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

08) $\overline{\overline{z}} = z$

09) $\overline{i} = -i$

10) $\overline{a} = a$

11) $z + \overline{z} = 2\,Re(z)$

12) $z - \overline{z} = 2i\,Im(z)$

13) $Re(z_1 + z_2) = Re(z_1) + Re(z_2)$

14) $Im(z_1 + z_2) = Im(z_1) + Im(z_2)$

15) $Arg(z_1 - z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2)$

16) $Arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = Arg(z_1) - Arg(z_2)$

17) $Arg(\overline{z}) = -Arg(z)$.

Scanned with CamScanner

2017 නව විෂය නිර්දේශය මගින් අලුතින් එකතු වූ පාඩම් කොටස්

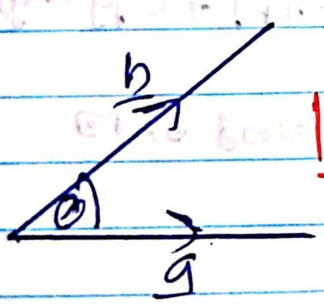
* සංකීර්ණ සංඛ්‍යා – ද මුවාර් ප්‍රමේය
* න්‍යාස – සමගාමී සමීකරණ විසඳීම
* අනුකලනය – කලාපවල පරිමාව සෙවීම
* දෛශික – කතිර ගුණිතය.

(අ) ද මුවාර් ප්‍රමේය.

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ නම්,

$$z^n = r^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]$$

(ආ) දෛශික වල කතිර ගුණිතය



$$\underline{a} \times \underline{b} = |\underline{a}||\underline{b}|\sin\theta \cdot \underline{n}$$

* මෙහි a, b සංගුණක දෛශික වේ

කතිර ගුණිතයේ වැදගත් ලක්ෂණ.

- කතිර ගුණිතයෙන් ලැබෙන අවසාන ප්‍රතිඵලය දෛශිකයක් වේ
- $\underline{n}$ යනු $\underline{a}$ හා $\underline{b}$ පවතින තලයට ලම්බකව පවතින ඒකක දෛශිකය වේ

කතිර ගුණිතයේ වැදගත් සූත්‍ර.

- කතිර ගුණිතය න්‍යාදේශ නැත.

- $\underline{a} . \underline{b} = \underline{b} . \underline{a}$
- $\underline{a} \times \underline{b} \neq \underline{b} \times \underline{a}$
- $\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a}$

සටහන්

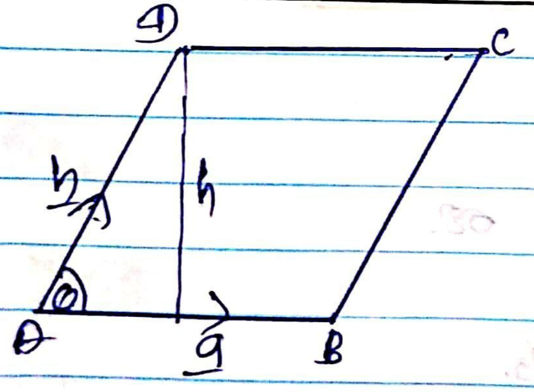
2×2 හා 3×3 න්‍යාස වල නිශ්චායක සෙවීම මෙසේද කරන වේ

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$\det A = |a \times d - b \times c|$

$\det B = a|ei - hf| + c|gh - ge|$

සමාන්තරාස්‍රයේ වර්ගඵලය කතිර ගුණිතයෙන් සෙවීම.



$OBCD$ ▱ ව.ඵ $= OB \times h$

$= |a| \times h$

$= |a|.|b| \sin\theta$

$OBCD$ ▱ ව.ඵ $= |\underline{a} \times \underline{b}|$

$a \times b = |a||b| \sin\theta \, \underline{n}$

$|a \times b| = |\, |a||b| \sin\theta \, \underline{n} \,|$

$= |a||b| \sin |\underline{n}|$

$= |a||b| \sin\theta$

Scanned with CamScanner

(03) න්‍යාස මගින් සමගාමී සමීකරණ විසඳීම.

1) $3x + y = 4$
$2x - 3y = -1$

සමගාමී සමීකරණ 2 න්‍යාස මගින් විසඳන්න.

විසඳුම

① දී ඇති න්‍යාස ආකාරයෙන් ලියා ගන්න ($Ax = B$)

② ඉන්පසු A^{-1} මගින් ගුණ කරන්න.

③ සමීකරණ න්‍යාසයෙන් A සොයා ආදේශ කරන්න.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{x} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$Ax = B$

$x A^{-1} = A^{-1} \cdot Ax = A^{-1}B$

$Ix = A^{-1}B$

$x = A^{-1}B$

A^{-1} සෙවීම

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}}{(-9-2)}$$

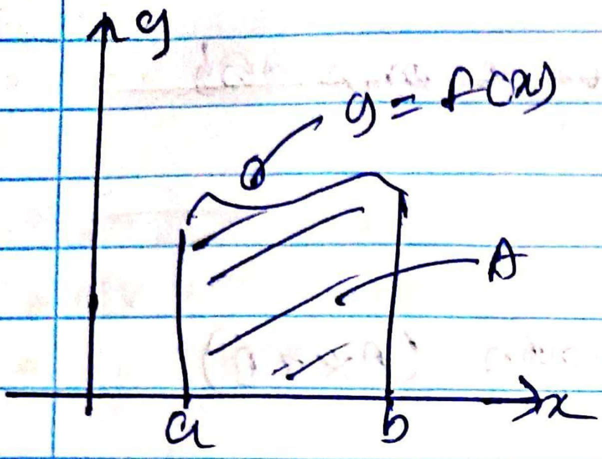
$$= \frac{1}{-11}\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} \frac{3}{11} & \frac{1}{11} \\ \frac{2}{11} & \frac{-3}{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

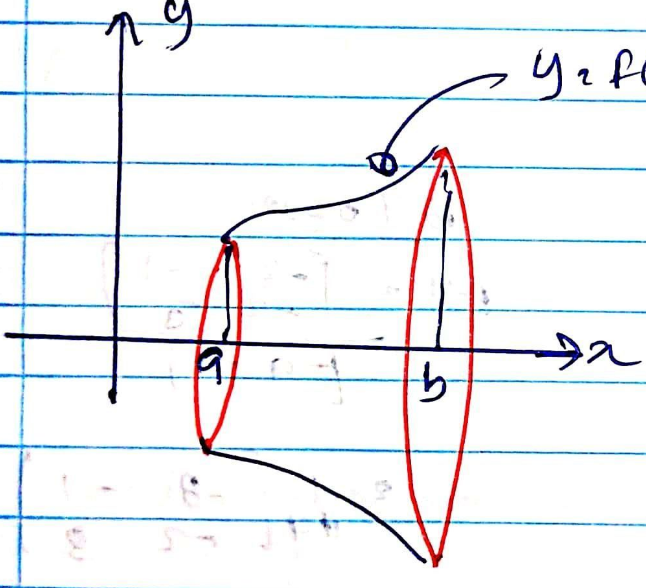
$x = 1$
$y = 1$ //

(04) අනුකලනය මගින් වර්ගඵලය සෙවීම.



$$A = \int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

y = f(x) ශ්‍රිතය x අක්ෂය වටා 360° ක් භ්‍රමණය කිරීම නිසා ලැබෙන ඝන වස්තුවේ පරිමාව සෙවීම.



$$V = \int_a^b \pi \cdot y^2 \cdot dx$$

$$V = \int_a^b \pi \left[f(x)\right]^2 dx$$

12 ද්විපද ප්‍රසාරණය

$$(a+x)^n = \underbrace{(a+x)(a+x)\ldots\ldots(a+x)}_{n \text{ වාරයක්}}$$

$$= a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + \ldots {}^nC_{n-1} a^1 x^{n-1} + x^n$$

$$(a+x)^n = \sum_{r=1}^{n} {}^nC_r \, a^{n-r} . x^r$$

$${}^nC_r = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

ප්‍රසාරණය ලියන්න පුළුවන් මෙහෙම ඉතින්,

$$(a+x)^6 = \sum_{r=0}^{6} {}^6C_r \, a^{6-r} x^r$$

$n=6$. $r=0,1,2,3,4,5,6$.

$$= {}^6C_0 a^6 x^0 + {}^6C_1 a^5 x^1 + {}^6C_2 a^4 x^2 + {}^6C_3 a^3 x^3 + {}^6C_4 a^2 x^4 + {}^6C_5 a x^5 + {}^6C_6 a^0 x^6$$

*ද්විපද සංගුණක සමාන වේ.
*මේවා සමමිතික වේ.

උදාහරණ.

$${}^6C_1 = \frac{6!}{5!1!} = \frac{5! \times 6}{5! \times 1!} = 6.$$

$${}^6C_6 = 6$$

$${}^6C_3 = \frac{6!}{3!3!} = 20$$

Scanned with CamScanner

$^nC_0 = 1$

$^nC_n = n$

$$(a+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r \, a^{n-r} \, x^n$$

↓ පොදු පදය.

$$T_{r+1} = {}^nC_r \, a^{n-r} \cdot x^r$$

පළමු පදය $= T_{0+1} = {}^nC_0 \, a^{n-n} \, x^n$

දෙවන පදය $= T_{1+1} = {}^nC_1 \, a^{n-1} x^1$.

m වන පදය $= T_m = {}^nC_{m-1} \, a^{n-(m-1)} \, x^{m-1}$

සංක්ෂිප්තය.

(01) $(a+x)^n = \sum_{r=1}^{n} {}^nC_r \, a^{n-r} \, x^n$

(02) r+1 වන පදය $= {}^nC_r \, a^{n-r} \, x^n$.
T_{r+1}

(03) $^nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$

(04) $n! = (n-1)! \times n$.

ද්විපද සංගුණක ආශ්‍රිත පදයන් හඳුනාගැනීම.

(01) $^nC_r = \dfrac{n!}{(n-r)\,r!}$

$^nC_0 = 1$, $^nC_n = 1$

$^nC_0 = \dfrac{n!}{(n-0)!\,0!}$

$^nC_0 = \dfrac{n!}{n!\,1}$

(ii) $^nC_1 = \dfrac{n!}{(n-1)!\,1!} = \dfrac{(n-1)!\times n}{(n-1)!\times 1!} = n$

(iii) $^nC_{n-1} = n$

$= \dfrac{n!}{(n-(n-1))!\,(n-1)!} = \dfrac{n!}{1!\,(n-1)!}$

$= \dfrac{(n-1)!\,n}{(n-1)!\,1!} = n$

(iv) $^nC_r = {}^nC_{n-r} = \dfrac{n!}{(n-(n-r))!\,(n-r)!} = \dfrac{n!}{r!\,(n-r)!}$

සාධාරණ පදය.

$$(a+x)^n = \sum_{r=0}^{n} {}^nC_r\, a^{n-r} x^{n}.$$

ද්විපද සං! $= {}^nC_r$

x හි සං! $= {}^nC_r\, a^{n-n}.$